מבחן גמר במתמטיקה

משך המבחן 3 שעות. אין לצאת ב-45 הדקות האחרונות של המבחן!
כל נוסחה שנעשה בה שימוש ואינה מופיעה בדף הנוסחאות – חייבת הוכחה!

פתור אחת מהשאלות 1 או 2

שאלה 1 (15%)

נא לפתור את אי השוויון $\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x \geq 0$ פתרון כללי.

שאלה 2 (15%)

נא לפתור את אי השוויון $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{x+1}\frac{x^2+6x+9}{2(x+1)}} \geq \frac{1}{2}$

* * *

שאלה 3 (15%) - שאלת חובה!

בחצי מעגל בעל רדיוס R ומרכז O, חסום משולש ABC כך ש- BC קוטר המעגל ו-
$\alpha > \frac{\pi}{4}$, $\sphericalangle ABC = \alpha$. רדיוס המאונך ל- BC חותך את הצלע AC בנקודה D.

9% א. לחשב את שטח המרובע ABOD באמצעות R ו α.
6% ב. לחשב את שטח המרובע ABOD במקרה שאפשר לחסום בו מעגל ו- $R = 4$

* * *

שאלה 4 (15%) - שאלת חובה!

נתונה פירמידה SABC שבסיסה משולש ABC וקודקודה S. נקודה M היא אמצע המקצוע SB,
K מרכז הכובד של הבסיס (נקודת החיתוך של התיכונים).
נתון: הוקטור $\overrightarrow{AB} = (1,-1,0)$ והנקודות $S(2,3,4)$, $A(1,0,1)$, $C(-1,2,3)$.

5% א. נא לרשום את משוואת הישר MK בצורה פרמטרית או בצורה קנונית (סימטרית).
5% ב. נא לחשב את הזווית שיוצר ישר MK עם מישור הבסיס.
5% ג. נא לחשב את אורך גובה הפירמידה.

פתור אחת מהשאלות 5 או 6

<u>שאלה 5 (15%)</u>

10% א. בפרבולה $y=-x^2+m^2$ ($m>0$ פרמטר) חסום טרפז **<u>שכל קודקודיו</u>** על הפרבולה והבסיס הגדול נמצא על ציר X. נא למצוא את m אם ידוע שהטרפז הוא בעל שטח מקסימלי וערכו 32.

5% ב. נא לחשב את הערך של $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\sin 3x\cdot\cos x\,dx$

<u>שאלה 6 (15%)</u>

7% א. להוכיח כי לכל n אי זוגי מתקיים אי השוויון $3^n+3^{n-2}+\ldots+\frac{1}{3^{n-2}}+\frac{1}{3^n}\geq n+1$

האם הטענה א' נכונה לכל n טבעי. נמק!

8% ב. עבור אילו ערכי m למשוואה $2z^2-(m-2)^2z-\frac{i}{8}=0$ פתרון יחיד. (m פרמטר מרוכב).

* * *

<u>שאלה 7 (20%) - שאלת חובה!</u>

בפירמידה ישרה הבסיס מתומן משוכלל ,בעל צלע השווה ל 4 . בגובה 5 מעל הבסיס מעבירים מישור המקביל למישור הבסיס וחותך את כל אחד מהפיאות לאורך קטע שאורכו 3.

10% א. להוכיח כי שטח המעגל החוסם את הבסיס התחתון שווה $8\left(2+\sqrt{2}\right)\pi$.

10% ב. לחשב את נפח הפירמידה.

* * *

פתור אחת מהשאלות 8 או 9

<u>שאלה 8 (20%)</u>

נתונה פונקציה $f(x)=\frac{2x^2+6x}{x^2-7x+10}$

14% א. לצייר את גרף הפונקציה ולציין אסימפטוטות, נקודות חיתוך עם הצירים, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון.

6% ב. למצוא את כל הערכים של m שעבורם למשוואה $(f(x))^2=m$ יש 3 פתרונות בלבד.

<u>שאלה 9 (20%)</u>

12% א. למצוא את מקדמי הפולינום $p(x)=ax^4+x^3+bx^2+cx+d$ אם נתון שהוא מתחלק ב- $(x-1)^2$ ללא שארית, הגרף של $p(x)$ עובר דרך הנקודה $(0,-2)$ והנורמל לגרף בנקודה $x=0$ מקביל לישר $x+y=7$.

8% ב. בכמה אופנים ניתן לסדר 7 אנשים בשורה אם משה חייב לעמוד ליד חיים , ניר חייב לעמוד ליד גיל ודפנה לא יכולה לעמוד ליד נוגה.

בהצלחה!

$$t^2+3tk+k^2 \geq 0$$

$$\sin^2 x+3\sin x\cos x+2\cos^2 x \geq 0$$

$$(\sin x+2\cos x)(\sin x+\cos x) \geq 0$$

$\sin x=-2\cos x$

$\operatorname{tg} x=-2$

$\Downarrow$

$\boxed{x=\overbrace{\operatorname{arctg}(-2)}^{\alpha}}$

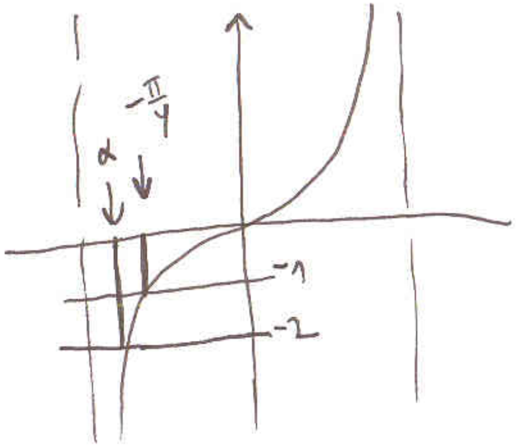
$+\pi k$

$\sin x=-\cos x$

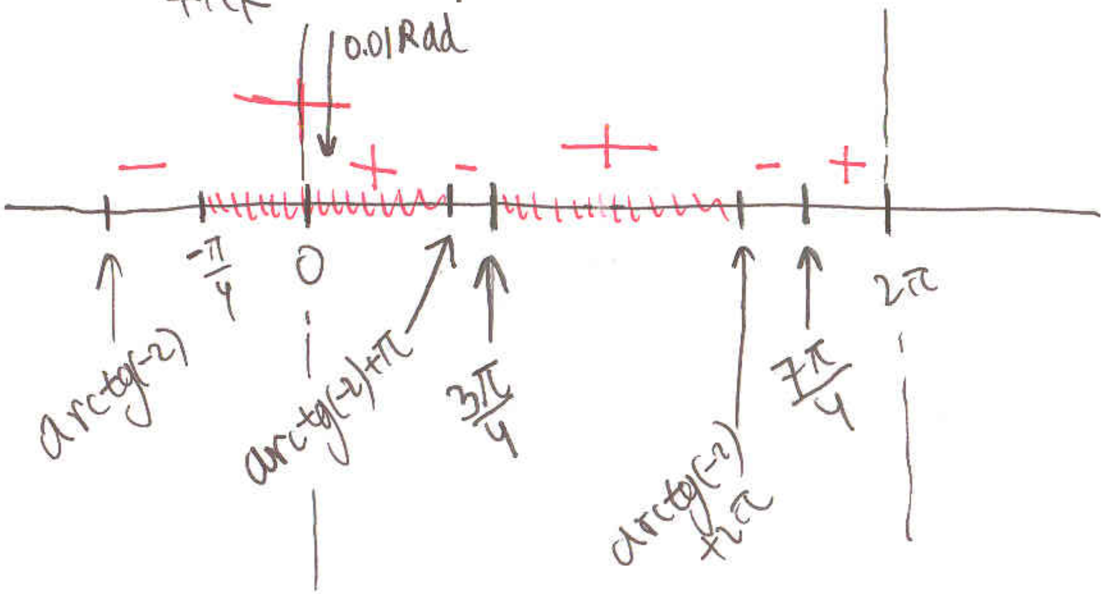
$\operatorname{tg} x=-1$

$\Downarrow$

$x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$



$$-\frac{\pi}{4}+\pi k \leq x \leq \operatorname{arctg}(-2)+\pi+\pi k$$



1

גמר
10.6.2016

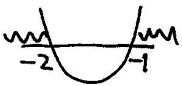
(1) ת"ה: $x \in R$

מחזור: 2π

$$\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x \ge 0$$

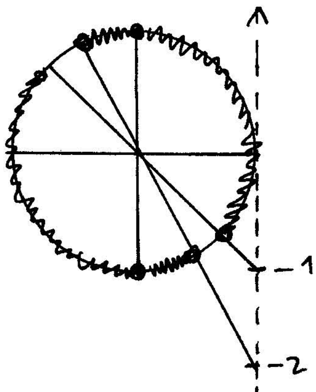
(אם $\cos x = 0$ $\Leftarrow$ $\sin^2 x \ge 0$ ✓ $\Leftarrow$ $\cos x = 0$ פתרון)

נחלק ב $\cos^2 x$:



$$\tan^2 x + 3\tan x + 2 \ge 0$$

$-1 \le \tan x$ או $\tan x \le -2$



$$\boxed{-\frac{\pi}{4} + \pi k \le x \le \arctan(-2) + \pi + \pi k}$$

② $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{x+1}\frac{x^2+6x+9}{2(x+1)}} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^1$

$\log_{x+1}\frac{(x+3)^2}{2(x+1)} \leq 1 = \log_{x+1}(x+1)$

$(x+1-1)\left(\frac{(x+3)^2}{2(x+1)} - (x+1)\right) \leq 0$

$x\left(\frac{x^2+6x+9-2x^2-4x-2}{2(x+1)}\right) \leq 0$

$\frac{x(-x^2+2x+7)}{(x+1)} \leq 0$

$\frac{x(x^2-2x-7)}{(x+1)} \geq 0$

$x=0 \quad x\neq -1$

$\frac{2\pm\sqrt{4+28}}{2} = \frac{2\pm 4\sqrt{2}}{2}$

$1+2\sqrt{2}$

$1-2\sqrt{2}$

$+ \quad - \quad + \quad - \quad +$

$1-2\sqrt{2} \quad -1 \quad 0 \quad 1+2\sqrt{2}$

$\Downarrow$

$$\boxed{\begin{array}{c} x \geq 1+2\sqrt{2} \\ -1 < x < 0 \end{array}}$$

(ת.ח)

$x+1>0$

$x+1\neq 1$

$x>-1$

$x\neq 0$

$\frac{x^2+6x+9}{2(x+1)} > 0$

$\frac{(x+3)^2}{(x+1)} > 0$

$- \quad - \quad +$

$-3 \quad -1$

$$\boxed{\begin{array}{c} x>-1 \\ x\neq 0 \end{array}}$$

$\log_F G$ [סימן] $\log_F Q$

$(F-1)(G-Q)$ [אותו] 0

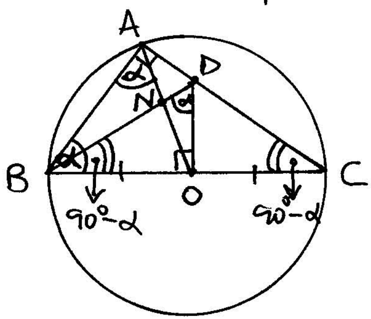
$F>0$

$F\neq 1$

$G>0$

$Q>0$

③ א חישוב זוויות:



$\sphericalangle BAO = \sphericalangle ABO = \alpha$ (ז. בסיס שוות במשו"ש)

$\sphericalangle DCO = 90^\circ - \alpha$ (חישוב ב $\triangle ABC$)

(כי $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ זווית היקפית הנשענת על קוטר)

$\sphericalangle DBO = \sphericalangle DCO = 90^\circ - \alpha$ (משו"ש $\triangle BCD$

כי גובה ≡ תיכון)

$\sphericalangle ABD = \alpha - (90^\circ - \alpha) = 2\alpha - 90^\circ$

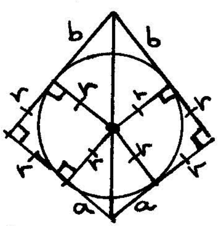
$\sphericalangle BNO = \alpha + 2\alpha - 90^\circ = 3\alpha - 90^\circ$ ($N = BD \cap AO$, הזווית חיצונית ל $\triangle ABN$)

$\sin\alpha = \frac{R}{BD}$ ($\triangle BOD$) $\Leftarrow$ $BD = \frac{R}{\sin\alpha}$

שטח מרובע לפי אלכסונים

$$S(ABOD) = \frac{AO \cdot BD \cdot \sin(3\alpha - 90^\circ)}{2} = \frac{R \cdot \frac{R}{\sin\alpha} \cdot (-\cos 3\alpha)}{2}$$

$$\boxed{S = -\frac{R^2}{2\sin\alpha} \cdot \cos 3\alpha}$$



ב טענה: מרובע בעל שתי זוויות נגדיות 90° שחוסם בו מעגל הוא דלתון.

הוכחה: ע"י העברת רדיוסים כמתואר בשרטוט נוצרים שני ריבועים (3 זוויות ישרות, וצלעות סמוכות שוות) בעלי צלע r.

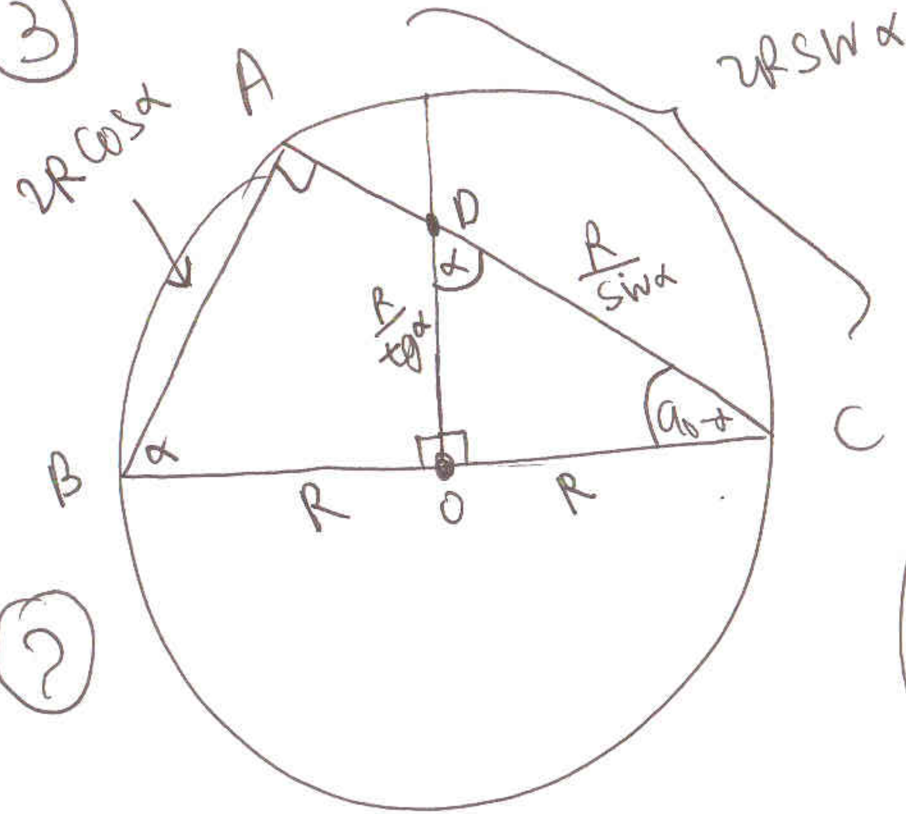
בתוספת המשיקים השווים a,b מקבלים שני משו"ש בעלי בסיס משותף ⇐ דלתון.

בנתוני השאלה: $AO = AB = BO = R$ ⇐ $\triangle AOB$ משו"צ ⇐ $\alpha = 60^\circ$.

נציב בתשובה של סעיף א':

$$S = -\frac{16}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot (-1) = \frac{16}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{16\sqrt{3}}{3}}$$

③



ⓒ

$$S_{ABOD}=\frac{2R\cos\alpha\cdot 2R\sin\alpha}{2}-\frac{R}{tg\alpha}\cdot\frac{R}{2}=$$

$$R^2\sin 2\alpha-\frac{R^2}{2tg\alpha}$$

$$\boxed{R^2\left(\sin 2\alpha-\frac{1}{2tg\alpha}\right)} \quad *$$

אפשר לחסום
מעגל במרובע
ABOD
⇓
$AB+OD=AD+BO$

$$R^2\left(2\sin\alpha\cos\alpha-\frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha}\right)$$

$$R^2\left(\frac{2\cos\alpha\sin^2\alpha-\cos\alpha}{2\sin\alpha}\right)$$

$$\frac{R^2\cos\alpha\left(2\sin^2\alpha-1\right)}{2\sin\alpha}=$$

$$\boxed{-\frac{1}{2}R^2\cot\alpha\cdot\cos 2\alpha} \quad *$$

?

$$\cancel{2}\cancel{R}\sin\alpha-\frac{\cancel{R}}{\sin\alpha}+\overset{1}{\cancel{R}}=\cancel{2}\cancel{R}\cos\alpha+\frac{\cancel{R}}{tg\alpha}$$

$$2\sin\alpha-\frac{1}{\sin\alpha}+1=2\cos\alpha+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad /\cdot\sin\alpha$$

$$\overbrace{2\sin^2\alpha-1}^{-\cos 2\alpha}+\sin\alpha=2\cos\alpha\sin\alpha+\cos\alpha$$

$$\sin\alpha-\cos\alpha=\sin 2\alpha+\cos 2\alpha$$

$\cancel{\sqrt{2}}\sin(\alpha-45)=\cancel{\sqrt{2}}\sin(2\alpha+45)$

$\alpha-45=2\alpha+45+360k$ | $\alpha-45=180-(2\alpha+45)+360k$

$-90+360k=\alpha$ | $3\alpha=180+360k$

$\varnothing$ | $\alpha=60+120k$

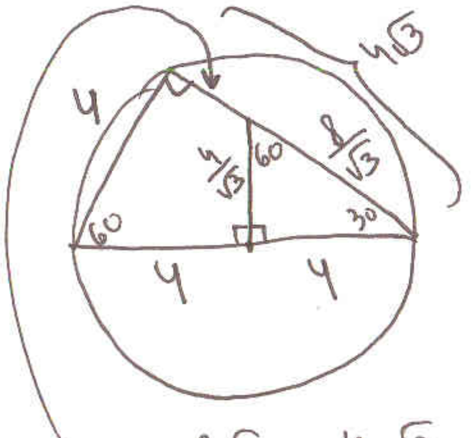
$\boxed{\alpha=60}$

$$S=4^2\left(\sin 120-\frac{1}{2\operatorname{tg}60}\right)=16\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=8\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=$$

$$8\left(\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{8\cdot 2\sqrt{3}}{3}$$

בקורה

$\boxed{\frac{16\sqrt{3}}{3}}$

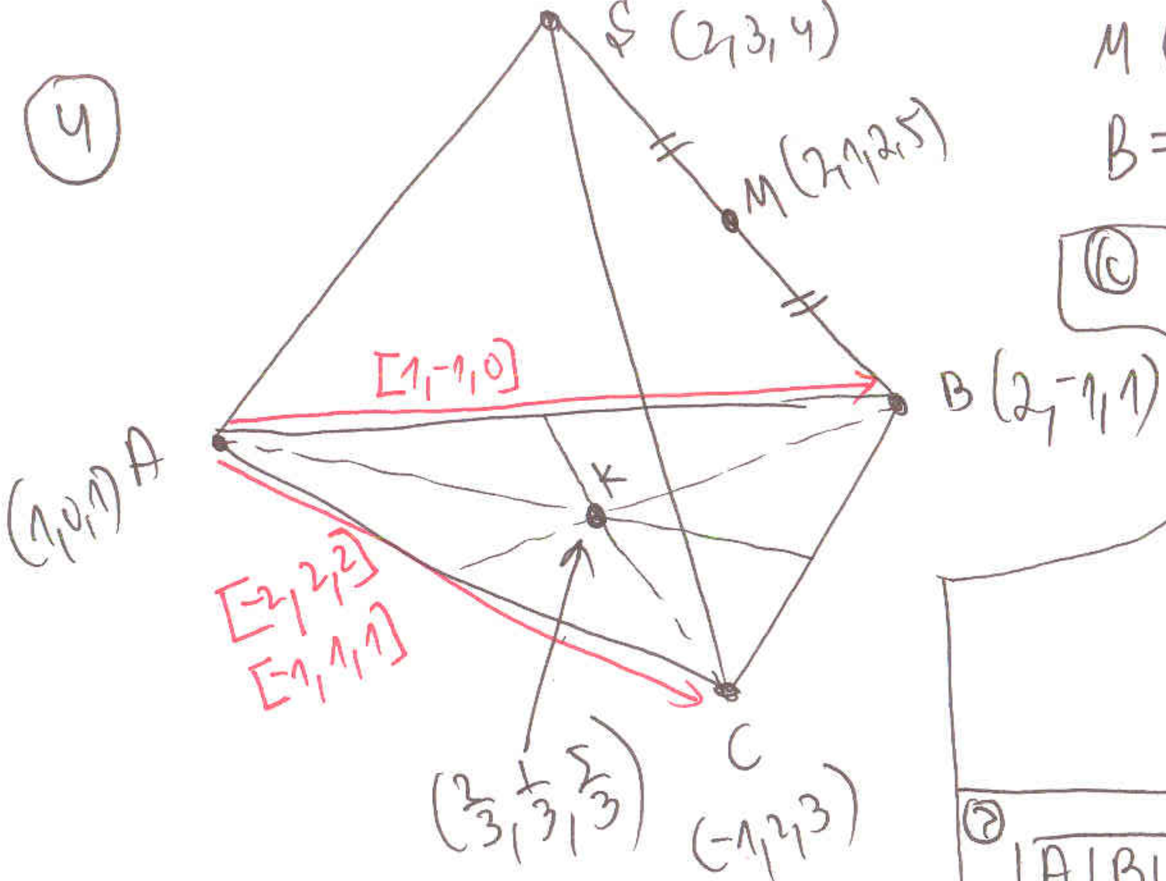


$4\sqrt{3}-\frac{8\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$\frac{4\sqrt{3}}{3}+4\overset{?!}{=}\frac{4\sqrt{3}}{3}+4$

$\frac{4\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}}{2}\cdot 2=\frac{16\sqrt{3}}{3}$

(4)



$$K\left(\frac{1+2-1}{3},\ \frac{0-1+2}{3},\ \frac{1+1+3}{3}\right)$$

$$K\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{5}{3}\right)$$

$$M\left(\frac{2+2}{2},\ \frac{3-1}{2},\ \frac{4+1}{2}\right)=(2,1,2.5)$$

$$B=(1,0,1)+(1,-1,0)=(2,-1,1)$$

(c)

$$\overline{MK}:\ (2,1,2.5)+k\left(\frac{2}{3}-2,\ \frac{1}{3}-1,\ \frac{5}{3}-\frac{5}{2}\right)$$

$$(2,1,2.5)+k\left(-\frac{4}{3},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{5}{6}\right)$$

$$\boxed{(2,1,2.5)+k(8,4,5)}\qquad \boxed{\frac{x-2}{8}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-2.5}{5}}$$

פרמטרית — קנונית סימטרית

(ד)

A	B	C
1	-1	0
-1	1	1

$\overline{n}\,(-1,-1,0)$

$$\frac{\left|(8,4,5)\cdot(-1,-1,0)\right|}{|8,4,5|\ |-1,-1,0|}=\sin\alpha$$

$$\frac{12}{\sqrt{64+16+25}\ \sqrt{2}}=\frac{12}{\sqrt{105\cdot 2}}=\frac{12}{\sqrt{210}}$$

$$\boxed{\alpha=\arcsin\left(\frac{12}{\sqrt{210}}\right)}$$

(2)

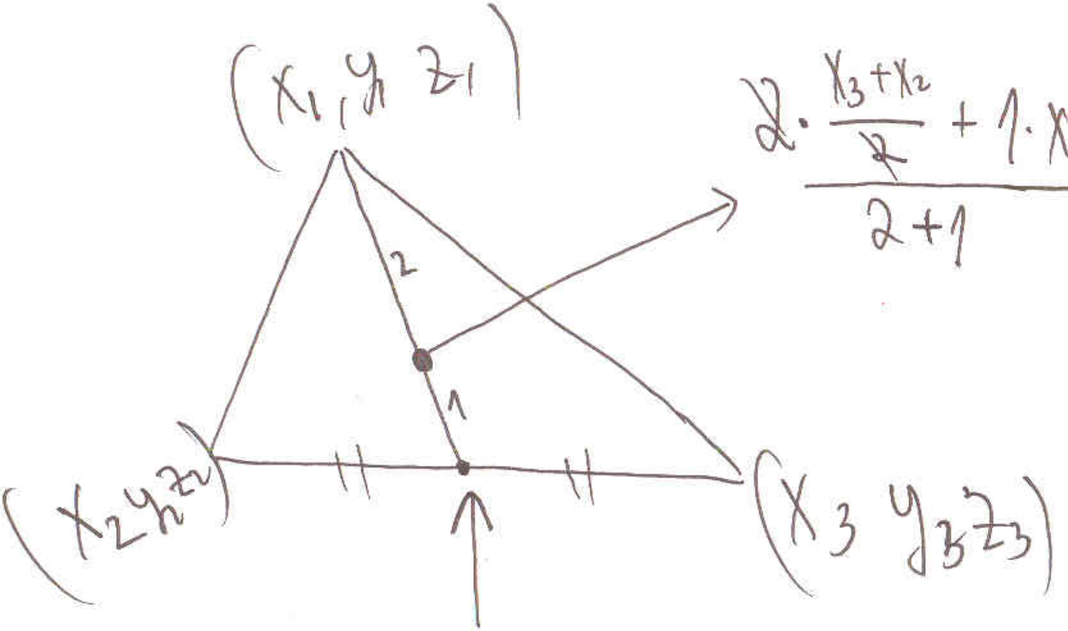
$$x+y+0z+D=0$$

1 0 1 $\quad D=-1$

$$x+y-1=0 \qquad (2,3,4)$$

$$\frac{|2+3-1|}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=\boxed{2\sqrt{2}}$$

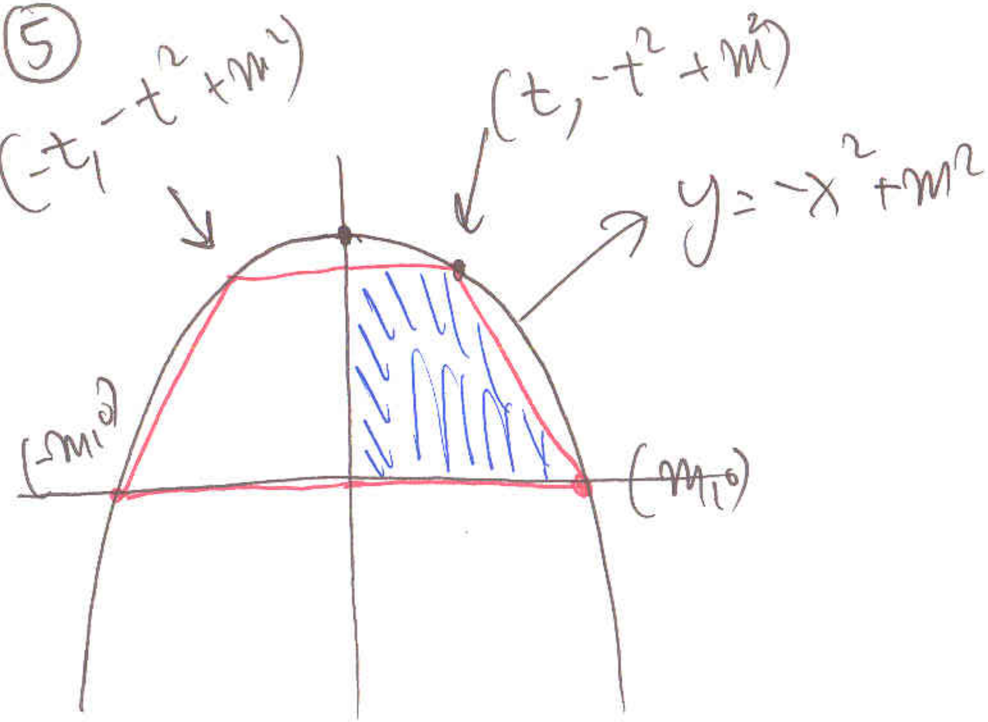
הסבר למפגש תיכונים



$$\frac{x_3+x_2}{2}$$

$$\frac{2\cdot\frac{x_3+x_2}{\cancel{2}}+1\cdot x_1}{2+1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

⑤



$$\frac{1}{2}(-t^2+9t^2)(t+3t)=16 \quad /\cdot 2$$

$$8t^2\cdot 4t = 32$$

$$t^3=1 \Rightarrow \boxed{t=1} \Rightarrow \boxed{m=3}$$

$$4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x\cos x\,dx = 4\cdot\frac{1}{2}\int \sin 4x+\sin 2x\,dx$$

$$2\left(\frac{-\cos 4x}{4}-\frac{\cos 2x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\left(\left(\frac{-\cos\pi}{4}-\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{2}\right)-\left(\frac{-1}{4}-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$2\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)=2$$

⑥

$$S_{MAX}=32 \Rightarrow \frac{1}{2}S_{MAX}=16$$

$$S=\frac{(-t^2+m^2)(t+m)}{2}=$$

$$\frac{1}{2}(-t^3-mt^2+m^2t+m^3)$$

$$S'=\frac{1}{2}(-3t^2-2mt+m^2)=0$$

$$(m-3t)(m+t)=0$$

$$m=3t$$

$$t=\frac{m}{3} \leftarrow \text{MAX}$$

$$S''=-6t-2m \xrightarrow[t=\frac{m}{3}]{} <0$$

6 ב

$$3^n+3^{n-2}+\dots+\frac{1}{3^{n-2}}+\frac{1}{3^n}\geq n+1$$

בדיקה:

$n=1$

$$3^1+3^{-1}\geq 2$$

$$3+\frac{1}{3}\geq 2$$

נניח עבור n

נוכיח עבור $n+2$

צעד:

לפי ההנחה.

$$3^{n+2}+\boxed{3^n+\dots+\frac{1}{3^n}}+\frac{1}{3^{n+2}}\geq n+2+1$$

$$3^{n+2}+(n+1)+\frac{1}{3^{n+2}}\geq n+3$$

נסמן

$3^{n+2}=t$

$t>0$

$$t+\frac{1}{t}\geq 2\ \ /\cdot t$$

$$t^2+1\geq 2t$$

$$t^2-2t+1\geq 0$$

$$(t-1)^2\geq 0$$

מ.ש.ל.

?

$$2z^2-(m-2)^2z-\frac{1}{8}i=0$$

אין מצב עליו $a=0$

ולכן רק $\Delta=0$

$$\Delta=(m-2)^4-4\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{8}i\right)=0$$

$$(m-2)^4=-i=1\,\text{cis}\,\frac{3\pi}{2}$$

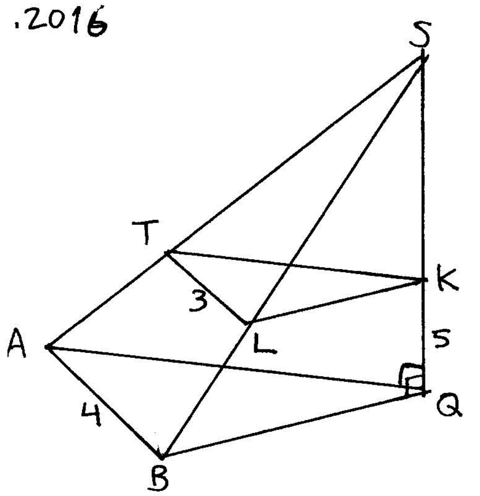
$-\frac{\pi}{2}$

$$m-2=\sqrt[4]{1}\,\text{cis}\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{4}\right)$$

$$m-2=\text{cis}\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right)$$

$$\boxed{m=\text{cis}\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right)+2 \quad k=0,1,2,3} \quad \boxed{=\text{cis}\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right)+2}$$

גמו
.2016



(7)

בשרטוט: AB צלע הבסיס

S ראש הפרמידה

$SQ \perp ABQ$ גובה הפרמידה

לפי הנתון: $AB=4$

Q מרכז המעגל החוסם את הבסיס (תכונת פרמידה ישרה)

$KQ=5$, KTL מישור החתך

$KTL \parallel ABQ$, $TL=3$.

$TL \parallel AB$; $LK \parallel BQ$ (המישור BQS חותך שני מישורים מקבילים לאורך ישרי חיתוך מקבילים וכך גם המישור ABS)

$\frac{3}{4}=\frac{TL}{AB}=\frac{SL}{SB}=\frac{SK}{SQ}$ (לפי משפט תלס עבור $\Delta ABS, \Delta BQS$)

$SQ=20 \Leftarrow SK=15 \Leftarrow 3\cdot SK+15=4\cdot SK \Leftarrow \frac{3}{4}=\frac{SK}{SK+5}$

(א) נסמן $AQ=R$.

$\sphericalangle AQB=\frac{360^\circ}{8}=45^\circ$. לפי משפט $\cos$ ב ΔABQ:

$AB^2=AQ^2+BQ^2-2\cdot AQ\cdot BQ\cdot \cos 45^\circ$

$16=R^2+R^2-\cancel{2}\cdot R^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \Rightarrow 16=(2-\sqrt{2})R^2 \Rightarrow R^2=\frac{16}{2-\sqrt{2}}=8(2+\sqrt{2})$

$S=\pi R^2=\pi\cdot\frac{16}{2-\sqrt{2}}\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\pi\,\frac{16(2+\sqrt{2})}{2}=\boxed{8\pi(2+\sqrt{2})}$

(ב)

$V=\frac{8\cdot S(\Delta ABQ)\cdot SQ}{3}=\frac{\cancel{8}^{4}\cdot\frac{AQ\cdot BQ\cdot\sin 45^\circ}{\cancel{2}}\cdot 20}{3}=\frac{4}{3}\cdot R^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 20$

$=\frac{4}{3}\cdot 8\cdot(2+\sqrt{2})\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\cdot\cancel{20}_{10}=\frac{4}{3}\cdot 8\cdot(2\sqrt{2}+2)\cdot 10=\boxed{\frac{640}{3}\cdot(\sqrt{2}+1)}$

8

$$y=\frac{2x^2+6x}{x^2-7x+10}$$

$x^2-7x+10\neq 0$

$(x-2)(x-5)\neq 0$

$x\neq 2$ $\quad x\neq 5$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$

$x=2$

$\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = -\infty$

$x=5$

10

$m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+6x}{x^3-7x^2+10x}=0$ $\Rightarrow$ $\boxed{y=2}$

$n=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+6x}{x^2-7x+10}=2$

$(0,0)$

$(-3,0)$

$$y'=\frac{(4x+6)(x^2-7x+10)-(2x-7)(2x^2+6x)}{(\ )^2}=$$

$$y'=\frac{\cancel{4x^3}-28x^2+40x+6x^2-\cancel{42x}+60-\cancel{4x^3}-12x^2+14x^2+\cancel{42x}}{(\ )^2}=$$

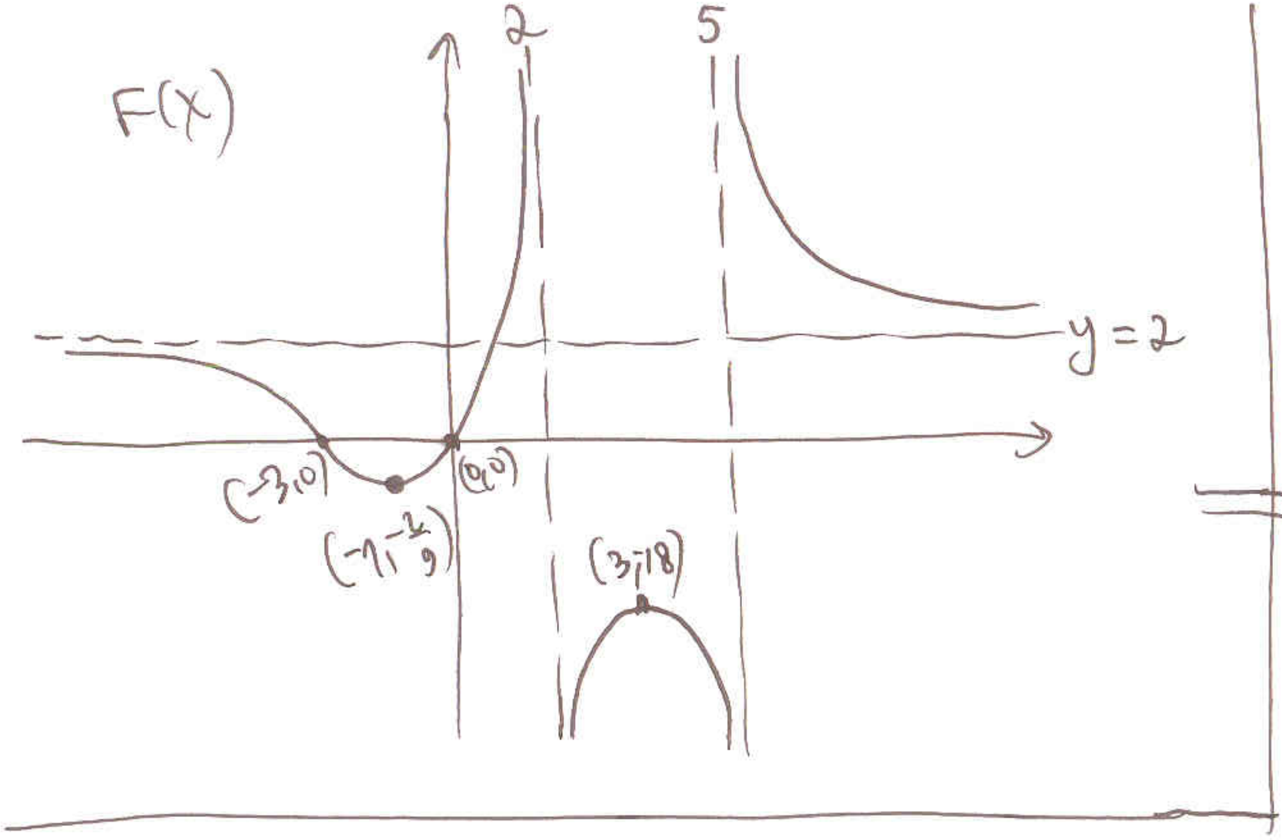
$$\frac{-20x^2+40x+60}{(\ )^2}=\frac{-20(x^2-2x-3)}{(\ )^2}=\frac{-20(x-3)(x+1)}{(\ )^2}$$

$(3,-18)$	$(-1,-\frac{2}{9})$
MAX	MIN

$-\ \searrow$ $\quad -1\quad$ $+\ \nearrow$ $\quad 2\quad$ $+\ \nearrow$ $\quad 3\quad$ $-\ \searrow$ $\quad 5\quad$ $-\ \searrow$

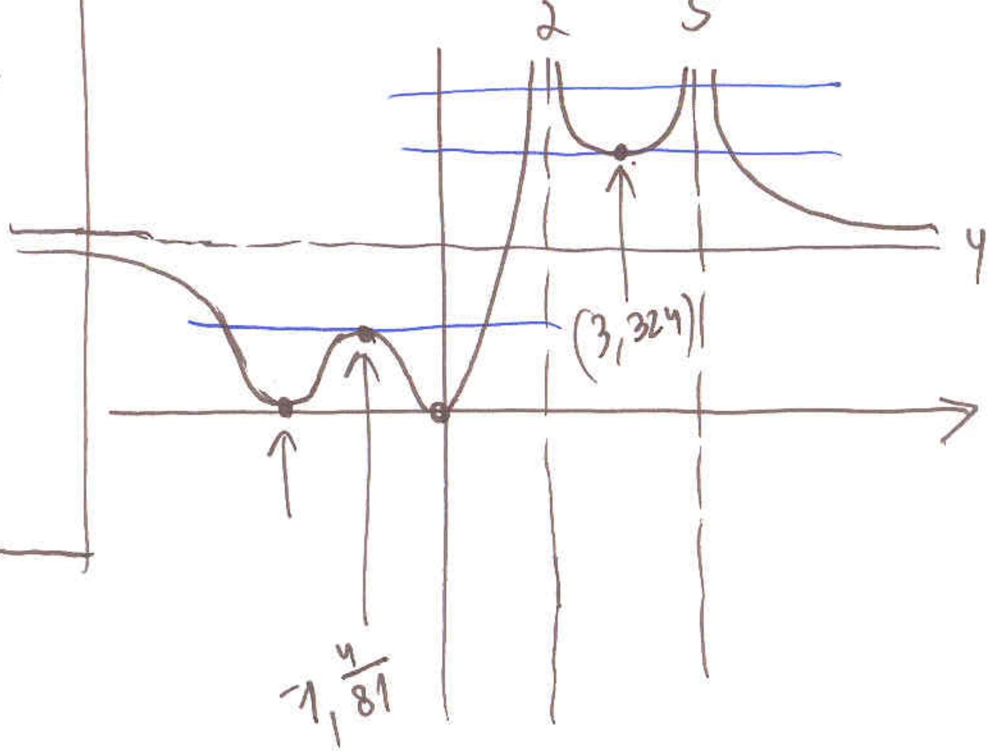
$-1<x<2,\ 2<x<3$:עולה

$x<-1,\ 3<x<5,\ x>5$:יורד



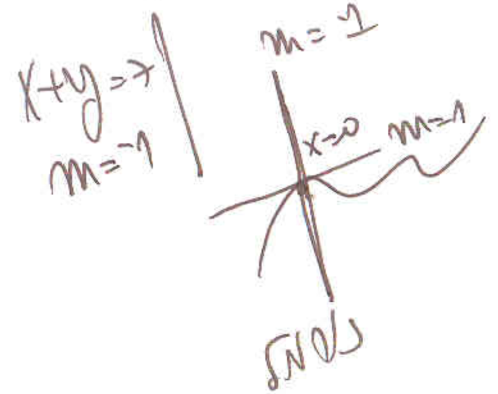
②

$$(F(x))^2 = m$$



$$\boxed{m = 324 \qquad m = \frac{4}{81}}$$

9 b $p(x) = ax^4 + x^3 + bx^2 + cx + d$



$p(x) = (x-1)^2 (R(x)) + 0 \to \boxed{p(1)=0}$ ✓✓

$\to \boxed{p'(1)=0}$ ✓✓

$\boxed{p(0)=-2}$

$\boxed{p'(0)=1}$

$p'(x) = 4ax^3 + 3x^2 + 2bx + c$

$4a + 3 + 2b + c = 0 \Rightarrow 4a + 2b = -4$

$a + 1 + b + c + d = 0 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow a = -b$

$-4b + 2b = -4$

$-2b = -4$

$\boxed{b=2}$

$\boxed{a=-2}$

$\boxed{d=-2}$

$\boxed{c=1}$

$\boxed{p(x) = -2x^4 + x^3 + 2x^2 + x - 2}$ ✓

$\boxed{p'(x) = -8x^3 + 3x^2 + 4x + 1}$ ✓

ז מגע + חיוך אלה

נוף + גל

גנה לא עוה

$5! \cdot 2! \cdot 2! - 4! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! =$

$120 \cdot 4 - 24 \cdot 8 = 480 - 192 = \boxed{288}$